1 Integrace racionálních funkcí

1.1 Polynomy

Polynom $n-$tého stupně je funkce

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, x \in \mathbb{R},$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n$ a $a_n \neq 0$ jsou koeficienty polynomu. Stupeň budeme značit $n = \text{st } P(x)$.

Věta 1.1. *(***O rozkladu polynomu***) Libovolný polynom $P(x)$ stupně $n \geq 1$ s reálnými koeficienty lze rozložit na součin jednodušších polynomů*

$$P(x) = b_0(x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

přičemž

$$b_0, a_1 \ldots, a_r, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, p_s \in \mathbb{R},$$
$$k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N},$$
$$k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = n$$

a pro všechny polynomy

$$p(x) = x^2 + p_ix + q_i, i \in \{1, \ldots, s\} \text{ je } D = p_i^2 - 4q_i < 0.$$

Věta 1.2. *(***O rovnosti polynomů***) Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy. Pak $P(x) = Q(x)$ právě tehdy, když st $P(x)$ =st $Q(x)$ a jsou-li koeficienty obou polynomů u stejných mocnin stejné.*

1.2 Racionální funkce

Funkci, jejíž předpis je dán podílem dvou polynomů, tj. funkci

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, x \in \{x \in \mathbb{R} |\ Q(x) \neq 0\}$$

nazýváme *racionální funkcí*. Je-li st $P(x) <$ st $Q(x)$, pak funkci $R(x)$ nazýváme *ryze racionální funkce*, v opačném případě se jedná o *neryze racionální funkci.*

Věta 1.3. *(***O dělení polynomů***) Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dva polynomy a nechť st $Q(x) \geq 0$. Pak existují jednoznačně určené polynomy $Y(x)$ a $Z(x)$ takové, že*

$$P(x) = Y(x)Q(x) + Z(x),$$

přičemž st $Z(x) <$ st $Q(x)$.

Polynom $Y(x)$ je výsledkem dělení polynomu $P(x)$ nenulovým polynomem $Q(x)$ se *zbytkem* $Z(x)$. Pokud je polynom $Z(x) = 0$, pak říkáme, že polynom $Q(x)$ dělí polynom $P(x)$. Pro $x \in \mathbb{R}$ takové, že $Q(x) \neq 0$, lze tvrzení věty přepsat do tvaru, který možná lépe odpovídá jejímu názvu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Y(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)}.$$

Jednoduché racionální funkce:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, k \in \mathbb{N}$$

a

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} \text{ pro } p^2 - 4q < 0, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

nazýváme *parciální zlomky.*

Věta 1.4. *(***O rozkladu na parciální zlomky***) Nechť $P(x)$ a $Q(x)$jsou polynomy s reálnými koeficienty, nechť $0 \le st\ P(x) < st\ Q(x)$ a nechť rozklad $Q(x)$ na součin jednodušších polynomů je*

$$Q(x) = b_0(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}.$$

Pak existuje $m = st\ Q(x)$ jednoznačně určených reálných čísel

$$A_{11}, \dots, A_{1k_1}, \dots, A_{r1}, \dots, A_{rk_r},$$
$$B_{11}, C_{11}, \dots, B_{1l_1}, C_{1l_1}, \dots, B_{s1}, C_{s1}, \dots, B_{sl_s}, C_{sl_s}$$

tak, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0$ platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{r1}}{x-a_r} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}} +$$
$$+ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x+C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.$$

1.3 Integrace parciálních zlomků

Je třeba umět integrovat následující čtyři typy zlomků:

$$(1)\frac{A}{x-a}, \quad (2)\frac{A}{(x-a)^k}, \quad (3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad (4)\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

kde $A, B, a, p, q \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ a $p^2 - 4q < 0$. Ukážeme nyní na konkrétních příkladech, jak jednotlivé typy zlomků integrovat.

1.
$$\int \frac{A}{x-a}dx = \left| \begin{array}{c} x-a=t \\ dx=dt \end{array} \right| = A\int \frac{1}{t}dt = A\ln|t| + c = A\ln|x-a| + c.$$

2. pro $k > 1$ pak
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \left| \begin{array}{c} x-a=t \\ dx=dt \end{array} \right| = A\int \frac{1}{t^k}dt =$$
$$= A\frac{1}{(1-k)t^{k-1}} + c = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$$

3. Je-li $A = 2$ a $B = p$, pak máme obecně
$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q=t \\ (2x+p)dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}dt =$$
$$= \ln|t| + c = \ln|x^2+px+q| + c.$$

   Pokud máme obecně $x^2 + px + q$ a $p^2 - 4q < 0$, pak

$$x^2+px+q = (x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) =$$
$$= \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right).$$

Potom je

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1\right)}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = t \\ \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{q-\frac{p^2}{4}} \int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\text{arctg } t + c = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\text{arctg } \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c.$$

Nakonec vyřešíme nejobecnější případ třetího typu zlomku. Při výpočtu tohoto integrálu použijeme to, co již známe ze speciálních tvarů v předchozích dvou příkladech.

Obecně vypadá úprava a postup takto

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}+p-p}{x^2+px+q}dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{pA}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}.$$

Tyto integrály jsme však postupně řešili v předchozích příkladech